Grundbegriffe der höheren Mathematik

für Chemiker.

Von

Dr. **Kurt Arndt,**

Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Berlin.

Mit 11 Figuren im Text.

Berlin,

Mayer & Müller,

1905.

Grundbegriffe der höheren Mathematik

für Chemiker.

Von

Dr. **Kurt Arndt,**
Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Berlin.

Mit 11 Figuren im Text.

Berlin,
Mayer & Müller,
1905.

Göttingen.
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei
(W. Fr. Kaestner).

Vorwort.

Dieses bescheidene Büchlein ist von einem Chemiker für seine Fachgenossen geschrieben. Wer weitergehende mathematische Kenntnisse erwerben will, sei unter anderen auf folgende treffliche Werke hingewiesen:

„Lehrbuch der analytischen Geometrie" von O. Dziobek.

„Elemente der Differential- und Integralrechnung" von Autenheimer.

Das Buch von Nernst und Schönfliess „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften" ist bekannt genug, so dass ich es kaum erwähnen brauchte.

Charlottenburg, den 20. Juli 1905.



1. **Einleitung.** Heutzutage ist wohl jedem wissenschaftlich durchgebildeten Chemiker der Apparat von Beckmann wohlbekannt, mit dessen Hilfe man das Molekulargewicht einer Substanz aus der Gefrierpunktserniedrigung ableiten kann. Die Messung ist einfach, ebenso die Berechnung des Ergebnisses. In der Formel[1]) $m = \frac{k \cdot g}{dT \cdot G}$, deren man sich dabei bedient, hat die Konstante k einen für jedes Lösungsmittel verschiedenen Zahlenwert, z. B. für Benzol den Wert 5000.

Die Zahl 5000 ist nicht nur durch Versuche gefunden, sondern auch durch Rechnung zu ermitteln, wenn man die Schmelzwärme des Benzols kennt. Die Arbeit, die bei dem Ausfrieren des Benzols aus der Lösung geleistet wird, bedingt den Wert von k. Wegen der Analogie zwischen dem Gaszustande und den verdünnten Lösungen steht diese Rechenaufgabe in Beziehung zur folgenden: Welche Arbeit muss geleistet werden, um eine gegebene Gasmenge um einen bestimmten Betrag zusammenzudrücken?

Diese Kompressionsarbeit ist gleich Volumverminderung $\times$ Gasdruck. Der Gasdruck nimmt aber während der Verdichtung stetig zu. Für grössere Volumenänderung müssen wir deshalb, wenn wir nicht ein falsches Resultat

1) Die Erläuterung dieser Formel sehe man z. B. in Arndt, Grundbegriffe der allgemeinen physikalischen Chemie, 2. Aufl., S. 17.

erhalten wollen, den ganzen Vorgang in eine Reihe von Stufen zerlegen, innerhalb deren wir den Gasdruck als konstant annehmen; je zahlreicher diese Stufen sind, um so genauer wird die Summe dieser Einzelarbeiten gleich der Gesamtarbeit sein, um so langwieriger aber auch die Rechnung, wenn wir auf die bequemen Hilfsmittel der Integralrechnung verzichten, die uns rasch und sicher zum Ziele führt.

Wenn auch der Nutzen der höheren Mathematik in diesem Falle wie überhaupt in der physikalischen Chemie unbestritten sehr gross ist, so ist doch leider Zeit und Arbeitskraft des Chemikers durch andere wichtige Fachstudien in hohem Grade in Anspruch genommen, so dass er nicht leicht sich entschliesst, eines der zahlreichen trefflichen Bücher grösseren oder auch nur mittleren Umfanges durchzuarbeiten, die in diese königliche Wissenschaft einführen. Ich will mich daher meinerseits bemühen, in möglichst knapper Form die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung darzulegen und durch kurze Beispiele, vornehmlich aus der physikalischen Chemie, zu erläutern.

Erinnerungen aus der niederen Mathematik.

2. a) $$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$$

b) $$(m + n)(m + n) = (m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2.$$

3. Die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten ist:

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

wir geben zur Auflösung ihr die Form

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Vergleichen wir $x^2 + \frac{b}{a}x$ mit dem „vollständigen Quadrat" $m^2 + 2mn + n^2$, so entspricht dem Gliede m^2 hier x^2, also m hier x, weiter dem Faktor $2n$ des zweiten Gliedes

$2mn$ hier $\frac{b}{a}$, also n hier $\frac{b}{2a}$; demnach ist als „quadratische Ergänzung“ entsprechend n^2 hier $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ hinzuzufügen; dann erhalten wir

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Links haben wir das vollständige Quadrat von $x + \frac{b}{2a}$; also ist

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2},$$

woraus als die beiden Wurzeln der Gleichung folgen:

$$x_{12} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}.$$

Anmerkung: Die quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln, weil auch negative Grössen ein positives Quadrat geben, z. B. ist 4 nicht nur das Quadrat von $+2$, sondern auch von -2: „Minus $\times$ Minus giebt Plus“.

4. **Potenzen.** Es bedeutet x^3 bekanntlich $x.x.x$; dagegen ist

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

5. $$x^m . x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$\frac{x^m}{x^m} = x^{m-m} = x^0;$$

andererseits ist

$$\frac{x^m}{x^m} = 1;$$

folglich ergiebt sich die Bedeutung des Ausdruckes x^0 als

$$x^0 = 1.$$

Anmerkung: Man erinnere sich, dass $x . 0 = 0$ ist; $\frac{x}{0} = \infty$ (unendlich gross), denn $\frac{x}{0,1} = 10x$, $\frac{x}{0,0001} = 10000x$ u. s w.

6. **Logarithmen.** Die „Basis" der gewöhnlich benutzten „dekadischen" Logarithmen ist die Zahl 10; die Zahl a ist der Logarithmus der Zahl b, wenn $b = 10^a$; daraus folgt

a) $$\log 10 = 1.$$

Für das Logarithmieren zusammengesetzter Ausdrücke gelten folgende Formeln:

b) $$\log(a \pm b) = \log(a \pm b),$$

kann also nicht weiter umgeformt werden.

c) $$\log(a . b) = \log a + \log b$$

d) $$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

e) $$\log a^b = b . \log a$$

f) $$\log \sqrt[b]{a} = \log a^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} \log a.$$

Aus diesen Formeln folgt:

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3. \log 10 = 3$$

$$\log 1 = \log 10^0 = 0. \log 10 = 0;$$ vergl. [5]

$$\log 0{,}1 = \log \frac{1}{10} = \log 1 - \log 10 = -1$$

$$\log 0{,}03 = \log \frac{3}{100} = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2 = 0{,}47712 - 2$$

$$\log 0{,}00002 = \log 2 - \log 100000 = 0{,}30103 - 5;$$

schliesslich wird

$$\log 0 = -\infty.$$

Die Basis der „natürlichen" Logarithmen ist die Zahl $e = 2.71828\ldots$; man unterscheidet die natürlichen Logarithmen durch die Schreibweise log nat oder kurz l von den dekadischen Logarithmen.

7. **Trigonometrie.** Hier möge man sich folgender Formeln erinnern:

a) $\sin\varphi = \cos(90^0 - \varphi) = \sin(180^0 - \varphi)$

b) $\cos\varphi = \sin(90^0 - \varphi) = -\cos(180^0 - \varphi)$

c) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

d) $\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

e) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta \pm \cos\alpha \,.\, \sin\beta$

f) $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \,.\, \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} \,.\, \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

Analytische Geometrie.

8. **Koordinaten.** Die Lage eines Punktes in der Ebene wird durch seinen Abstand von zwei festen, einander schneidenden Geraden bestimmt. Stehen diese beiden Geraden senkrecht auf einander, so bilden sie die „Axen" eines „rechtwinkligen Koordinatensystems".



Fig. 1.

In Figur 1 ist $PR = OQ = x$ die Entfernung des Punktes P von der einen Axe, $PQ = OR = y$ die von der anderen Axe. Man nennt x die Abscisse, y die Ordinate von P; die beiden Axen unterscheidet man als x-Axe oder Abscissenaxe und y-Axe oder Ordinatenaxe. Durch die Zulassung positiver und negativer Vorzeichen für die „Koordinaten", bestimmt man eindeutig den Ort des Punktes. So ergäben die Koordinaten $+x$ und $-y$

den Punkt P_4 rechts der Y-Axe unterhalb der X-Axe, $-x$ würde den Punkt in den Raum links der Y-Axe verweisen.

9. **Kurvengleichungen.** Sind die Grössen x und y durch eine Gleichung an einander geknüpft, so erhält man durch Einführung aller möglichen Zahlenwerte von x in die Gleichung die zugehörigen Werte von y und damit in geometrischem Sinne eine Reihe von Punkten, deren Gesamtheit eine Kurve darstellt; diese Kurve ist das geometrische Bild der Gleichung.

10. Aus den geometrischen Eigenschaften einer gegebenen Kurve lässt sich umgekehrt die „Gleichung“ der Kurve herleiten.

Beispiel: Für alle Punkte P einer geraden Linie AB (Fig. 1), von der die x-Axe in A geschnitten wird, hat der Winkel PAQ den gleichen Wert, sagen wir φ: aus der Figur ergiebt sich die Beziehung

$$\text{a)} \quad \operatorname{tang} PAQ = \operatorname{tang}\varphi = \frac{PQ}{AQ} = \frac{PQ}{OQ - OA} = \frac{y}{x - OA}$$

oder

$$\text{b)} \quad y = \operatorname{tang}\varphi \,.\, x - \operatorname{tang}\varphi \,.\, OA.$$

Die Grössen $\operatorname{tang}\varphi$ und OA ändern sich nicht mit der Lage des Punktes P auf der Geraden AB; wir können also $\operatorname{tang}\varphi$ und $\operatorname{tang}\varphi \,.\, OA$ mit dem für konstante Grössen üblichen Buchstaben k belegen (und zwar zum Unterschied die zweite Konstante mit einem Strich bezeichnet) und schreiben:

$$\text{c)} \quad y = k \,.\, x + k'.$$

Dies ist eine allgemeine Form der Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten.

Folgerung: Jede Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten lässt sich durch eine gerade Linie darstellen.

11. Jede Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten lässt sich durch einen Kegelschnitt darstellen.

also durch eine Parabel oder eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem sich die Gleichung auf die Form:

a) $$y^2 = k.x \text{ (Parabel)}$$

oder

b) $$y^2 = -kx^2 + k' \text{ (Ellipse)}$$

oder

c) $$y^2 = +kx^2 + k' \text{ (Hyperbel)}$$

zurückführen lässt.

Die Hyperbel lässt sich bei passender Wahl der Koordinatenaxen auch durch die einfachere Gleichung darstellen:

d) $$x.y = k''.$$

Beispiel: Das Boyle'sche Gesetz besagt, dass das Volumen v einer Gasmenge (bei konstanter Temperatur) umgekehrt proportional dem Druck p ist, d. h. $v = \frac{\text{konst.}}{p}$ oder $v.p = \text{konst.}$ Diese Beziehung lässt sich also nach Gleichung d) graphisch durch eine Hyperbel darstellen.

Besondere Fälle der Ellipse und der Hyperbel sind der Kreis und die gleichseitige Hyperbel; für sie ist die oben durch k bezeichnete Konstante $= 1$. Die Koordinatenaxen, für die die einfachere Hyperbelgleichung d) gilt, stehen bei der gleichseitigen Hyperbel senkrecht aufeinander (Fig. 2).

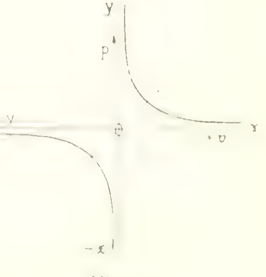


Fig. 2

Da in dem obigen Beispiel die Koordinaten p und v ihrer Bedeutung nach nur positives Vorzeichen haben können, so gilt für die Verbildlichung des Boyle'schen Gesetzes nur der im Felde der positiven x und y liegende Kurventeil. Wächst p, so wird v mit abnehmender Geschwindigkeit immer kleiner, bis schliesslich für unendlich grossen Druck das Volumen unendlich klein wird. Der eine Zweig der Kurve schmiegt

sich also allmählich der Ordinatenaxe an, bis er in unendlicher Entfernung vom Koordinatenanfang mit ihr zusammenfällt; ebenso nähert sich der rechte Zweig mit wachsendem x der Abscissenaxe andauernd, ohne in der Endlichkeit sie zu erreichen.

Eine solche Gerade, der sich eine krumme Linie ohne Ende nähert, heisst Asymptote.

Anmerkung: Die Hyperbelgleichung d) gilt für die Asymptoten als Koordinatenaxen.

12. Die Gleichung

$$y = e^x$$

oder ihre Umformung

$$x = \text{lognat}\, y$$

wird durch die „logarithmische" Linie (Fig. 3) wiedergegeben: zu ihr ist die x-Axe Asymptote.

13. Einer ganz anderen Kurvengattung, den periodischen Kurven, gehört die Sinuslinie (Fig. 4) an mit der Gleichung

$$y = \sin x.$$

Fig. 3.

Fig. 4.

Da der Wert von $\sin x$ bei wachsendem x zwischen den Werten -1 und $+1$ wiederkehrend schwankt, so steigt und fällt die Ordinate der Sinuslinie wechselnd in diesen Grenzen.

Die Veränderliche x pflegt man in solchen Fällen nicht in Graden (Winkelmass), sondern in Bogenmass anzugeben, indem man den Umfang eines Kreises ($2 r \pi$) mit dem Radius 1 als Bogenmass des Winkels 360° setzt; dann ent-

spricht 180° dem Bogenmass π und 90° $\frac{\pi}{2}$. Nach dieser Bezeichnungsweise wird also die Sinuslinie für $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ u. s. w. die x-Axe schneiden; die Maxima werden bei $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$ u. s. w., die Minima bei $x = \frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$ u. s. w. liegen.

14. Enthält die Gleichung drei Unbekannte, so ergiebt ihre geometrische Darstellung räumliche Gebilde; man bezieht hier auf drei Axen (x-, y- und z-Axe); gewöhnlich wählt man die z-Axe so, dass sie im Koordinatenanfang O senkrecht auf der Ebene steht, in der die beiden andern Axen liegen. Dann wird der Punkt P im Raume durch seine Abstände von den drei Koordinatenebenen bestimmt.

Beispiele: Die Gleichung:

$$ax + by + cz = d$$

bedeutet eine Ebene.

$$x^2 + y^2 + z^2 = k$$

eine Kugelfläche.

Will man nicht durch Drähte und Fäden oder aus Gips die räumlichen Gebilde herstellen, so kann man durch perspektivische Darstellung in der Ebene des Papiers die betreffende Fläche so anschaulich als möglich schildern.

15. **Polarkoordinaten.** Statt durch die Abstände von zwei Geraden kann man einen Punkt P in der Ebene auch in folgender Weise bestimmen (Fig. 5): Auf der festen Geraden L ist ein Punkt O gegeben; ziehen wir die Gerade PO, so bestimmen der Winkel φ zwischen PO und L und die Länge PO die Lage des Punktes P. Man bezeichnet die Länge OP mit r und nennt sie den Leitstrahl (Radiusvektor). Um P eindeutig zu bestimmen, muss auch die Drehrichtung gegeben sein, in der der Winkel φ gemessen werden soll.

Was die Beziehung der Polarkoordinaten zu dem rechtwinkligen Koordinatensystem anlangt, so ergiebt sich aus Fig. 5, dass

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi .$$

Beispiel: Stellen wir für P die Bedingung, dass alle Punkte P auf dem Umfang eines Kreises von gegebenem Durchmesser liegen sollen, so nehmen wir zweckmässig den Kreismittelpunkt als Koordinatenanfang: dann ist der Leitstrahl von P konstant gleich dem gegebenen Kreisradius und

$$r = a$$

die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten.

Differentialrechnung.

16. Während wir unter [9] uns eine Kurve durch eine Folge von Punkten festlegten, wollen wir sie jetzt durch Aneinanderfügen sehr vieler kleinster gerader Teilstrecken entstehen lassen; um so genauer wird dieser Aufbau sein, je winziger wir die Teilstrecken wählen, am genauesten, wenn wir zu unendlich kleinen Teilchen übergehen. Solche unendlich kleinen Grössen, die dem Werte Null beliebig nahe gedacht werden können, nennt man Differentiale.

Ein Differential ist eine unendlich kleine Grösse, die sich ohne Ende der Null nähert.

17. Die Summe aller Differentiale, aus denen die Linie erwachsen ist, das Integral, ist augenscheinlich die Linie selber. Es ist klar, dass das Integral nur dann einen bestimmten Wert hat, wenn die Grenzen angegeben sind, innerhalb deren die Summe gebildet, innerhalb deren „integriert" wird. Man unterscheidet demgemäss das bestimmte Integral vom unbestimmten Integral.

18. Den unendlich kleinen Zuwachs einer veränderlichen Grösse x bezeichnen wir durch dx. Die Aufforderung zur

Summierung dieser Differentiale bezeichnen wir durch Voransetzen eines langgezogenes S und schreiben das „Integral dx"

$$\int dx;$$

soll zwischen der unteren Grenze $x = m$ und der oberen Grenze $x = n$ integriert werden, so kennzeichnet man dies bestimmte Integral durch

$$\int_m^n dx.$$

Anmerkung: Eine endliche kleine Zunahme von x bezeichnet man durch Δx und die Summierung solcher endlichen kleinen Zunahmen durch den griechischen Buchstaben Σ.

19. Unsere nächste Aufgabe ist für verschieden gestaltete veränderliche Grössen ihren unendlich kleinen Zuwachs, ihr Differential, abzuleiten.

Das Differential einer konstanten Grösse ist naturgemäss Null.

$$dk = 0$$

20. Die unendlich kleine Zunahme der Summe $x + y$ ist gleich der Summe der Zunahmen von x und von y, also

$$d(x + y) = dx + dy$$

21. Ebenso ergiebt sich ohne weiteres:

$$d(x - y) = dx - dy.$$

22 Das Differential des Produktes $x . y$ wollen wir uns durch geometrische Anschauung ableiten, indem wir uns $x . y$ als den Flächeninhalt eines Rechteckes mit den Seiten x und y darstellen (Fig. 6). Verlängern wir x um Δx und y um Δy, so wird die Zunahme des Flächeninhaltes durch die Summe der drei Rechtecke $x . \Delta y$, $y . \Delta x$, $\Delta x . \Delta y$ angegeben, also



Fig. 6

$$\Delta(x . y) = x . \Delta y + y . \Delta x + \Delta x . \Delta y.$$

Das winzige Rechteck $\Delta x . \Delta y$ verschwindet um so mehr im Verhältnis zu $x . \Delta y$ und $y . \Delta x$, je kleiner wir die Zuwachse Δx und Δy nehmen.

Setzen wir z. B.

$$x = 1, \quad y = 2, \quad \Delta x = 0{,}1 \text{ und } \Delta y = 0{,}2,$$

so wird

$$x . \Delta y + y \Delta x = 1 . 0{,}2 + 2 . 0{,}1 = 0{,}4$$

$$\Delta x . \Delta y = 0{,}1 . 0{,}2 = 0{,}02$$

und das Verhältnis

$$\Delta x . \Delta y : x \Delta y + y \Delta x = 0{,}02 : 0{,}4 = 1 : 20$$

Für $\Delta x = 0{,}001$ und $\Delta y = 0{,}002$ erhalten wir:

$$x . \Delta y + y \Delta x = 1 . 0{,}002 + 2 . 0{,}001 = 0{,}004$$

$$\Delta x . \Delta y = 0{,}001 . 0{,}002 = 0{,}000002 \text{ und}$$

$$\Delta x . \Delta y : x \Delta y + y \Delta x = 1 : 2000.$$

Im Grenzfall wird also, wenn wir von der endlichen Differenz zum unendlich kleinen Differential übergehen:

$$\underline{d(x . y) = x . dy + y dx.}$$

Anmerkung: Aus der obigen Betrachtung lässt sich ersehen, dass es unendlich kleine Grössen verschiedenen Grades giebt; $dx . dy$ ist unendlich klein vom zweiten Grade und kann deshalb neben den unendlich kleinen Grössen vom ersten Grade $x . dy$ und $y . dx$ vernachlässigt werden.

23. Ist ein Faktor des zu differentiierenden Produktes konstant, so ist sein Differential nach [19] gleich Null und es folgt aus [22]

$$d(k . y) = k . dy,$$

d. h. einen konstanten Faktor kann man vor das Differentialzeichen ziehen.

24. Differentiation einer Potenz. Nach [22] wird

$$dx^2 = d(x . x) = x dx + x dx = 2 x dx$$

und weiter

$$dx^3 = d(x^2 \cdot x) = x^2 dx + x\,dx^2 = x^2 dx + x\,2x\,dx = 3x^2 dx.$$

und schliesslich

$$dx^n = n \cdot x^{n-1} dx.$$

Schreiben wir statt n jetzt $-n$, so wird

$$d\left(\frac{1}{x^n}\right) = d(x^{-n}) = -n \cdot x^{-n-1} dx = -n \frac{dx}{x^{n+1}}.$$

Beispiele:

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = d(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} dx = -\frac{dx}{x^2}.$$

Hierher gehört auch

$$d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

25. Die Differentiation eines **Quotienten** ergiebt sich aus [22] und [24]

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x \cdot y^{-1}) = x\,d(y^{-1}) + y^{-1} dx = -\frac{x\,dy}{y^2} + \frac{dx}{y}$$

oder anders geschrieben:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

26. Differentiation des **Logarithmus**. Hier wollen wir wieder von endlicher Zunahme ausgehen. Wir setzen

a) $$y = \log x$$

und lassen y um Δy zunehmen, wodurch x um Δx zunehmen möge; dann wird

b) $$y + \Delta y = \log(x + \Delta x).$$

Ziehen wir die Gleichung a) von b) ab, so wird

c)
$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log \frac{x + \Delta x}{x}$$
$$= \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Dividieren wir beiderseits durch Δx, so ergiebt sich

d)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x} \log\left\{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}.$$

Der Ausdruck $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ ist von der allgemeinen Form $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Gehen wir zur Grenze, zum Differential über, so wird im Bruch $\frac{x}{\Delta x}$ der Nenner unendlich klein, also $\frac{x}{dx} = \infty$. Für $n = \infty$ erreicht nun der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ einen Grenzwert (limes) und zwar ist dieser die unter [6] schon erwähnte Zahl e; man drückt dies aus durch die Gleichung:

e)
$$\lim_{n = \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dass sich $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ mit wachsendem n dieser endlichen Grenze nähert, kann man aus folgender Tabelle ersehen[1]:

[1] Die Tabelle ist dem bekannten Werke von Nernst und Schönflies „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften" entnommen.

Für $n = 1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10000 \quad \infty$ wird

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 \quad 2{,}594\ldots \quad 2{,}705\ldots \quad 2{,}712\ldots \quad 2{,}718\ldots \quad 2{,}71828\ldots$

Demnach wird

f) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e.$$

Wählen wir e als Basis des logarithmischen Systems d. h. gebrauchen wir natürliche Logarithmen, so wird $\log \text{nat}\, e = 1$ und

g) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Erinnern wir uns der Gleichung a, so ergiebt sich schliesslich

h) $$d (\log \text{nat}\, x) = \frac{1}{x} dx.$$

Anmerkung: Den Quotienten zweier Differentiale, wie z. B. $\frac{dy}{dx}$, bezeichnet man als „Differentialquotienten."

27. Differentiation von sin x: In Figur 7 sei der Kreisbogen $AP = x$; seine sehr kleine Zunahme werde angedeutet durch $PP_1 = \Delta x$. PQ und $P_1 Q_1$ seien senkrecht, PR parallel zu AM gezogen. Setzen wir nun noch den Kreisradius $= 1$ so wird

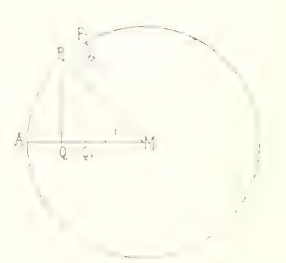


Fig. 7.

a) $$\sin x = PQ : PM = PQ : 1 = PQ$$

und entsprechend

b) $$\sin (x + \Delta x) = P_1 Q_1.$$

Ziehen wir a) von b) ab, so ist:

c) $$\sin(x + \Delta x) - \sin x = P_1Q_1 - PQ = P_1R.$$

Ziehen wir die Sehne PP_1, so wird im Dreieck PP_1R:

d) $$P_1R : PP_1 = \cos PP_1R.$$

Liegt P_1 sehr nahe P, wie in unserem Falle, so fällt die Sehne PP_1 praktisch mit dem Bogen $PP_1 = \Delta x$ zusammen. $\sphericalangle P_1PM$ wird ein rechter Winkel und $\sphericalangle PP_1R = RPM = PMA$, so dass wir für d) mit Benutzung von c) schreiben können:

e) $$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x.$$

Gehen wir von der endlichen Differenz zum Differential über, so wird $\sin(x + dx) - \sin x$ die unendlich kleine Zunahme von $\sin x$, also $d \sin x$ und nach e)

f) $$\underline{\underline{d \sin x = \cos x \,.\, dx.}}$$

28. Differentiation von $\cos x$. Wir setzen:

a) $$y = \cos x$$

b) $$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x.$$

Benutzen wir die unter [7 f] angeführte trigonometrische Formel, so wird:

c) $$\Delta y = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

und weiter

d) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\left[\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}\right] : \frac{\Delta x}{2}.$$

Je kleiner der Bogen Δx genommen wird, um so geringer ist der Unterschied zwischen ihm und seinem Sinus.

Man lasse in Fig. 7 P immer näher an A heranrücken, dann fällt schliesslich der Bogen PA und die Senkrechte $PQ = \sin PMA$ zusammen.

Es wird also:

$$e) \qquad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

und aus d) nunmehr, da Δx neben x verschwindet,

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

oder nach a)

$$d(\cos x) = -\sin x\, dx.$$

29. Mit Hilfe von [7d], [25] und [7c] ergiebt sich:

$$d(\operatorname{tang} x) = d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \,.\, \cos x\, dx - \sin x\,(-\sin x\, dx)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

30. Aus der Gleichung

$$x = \sin y$$

lässt sich ableiten $y = \operatorname{arc} \sin x$ d. h. y ist der Bogen (arcus), dessen Sinus den Wert x hat. In gleicher Weise erhält man die Begriffe arcus cosinus u. s. w.; man bezeichnet sie als cyklometrische Funktionen.

Differentiieren wir die Gleichung

$$x = \sin y$$

so wird nach [27]

$$dx = \cos y\, dy.$$

Da nach [7c]

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

oder

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

ist, so wird

$$dx = \sqrt{1 - x^2} \,.\, dy$$

oder

$$d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Auf ähnlichem Wege erhält man

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

31. Aus der Gleichung

a) $$y = e^x$$

folgt

b) $$\log \operatorname{nat} y = x.$$

Differentiieren wir b), so wird nach [26]

$$\frac{dy}{y} = dx$$

also gemäss a)

$$\underline{d\,(e^x) = e^x\,dx.}$$

32. Wichtig ist schliesslich noch das Differential des Ausdruckes

$$\log \operatorname{nat} (x + \sqrt{a + x^2}),$$

das uns gleichzeitig ein treffliches Uebungsbeispiel bietet. Wir setzen zur Vereinfachung der Rechnung

a) $$x + \sqrt{a + x^2} = u;$$

dann wird

b) $$d\,[\log \operatorname{nat} (x + \sqrt{a + x^2})] = d \log \operatorname{nat} u = \frac{du}{u}.$$

Darin ist weiter

c) $$du = d\,(x + \sqrt{a + x^2}) = dx + d\sqrt{a + x^2}$$

$$d\sqrt{a + x^2} = d\,(a + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,(a + x^2)^{-\frac{1}{2}}.\,d\,(a + x^2)$$

d) $$= \frac{1}{2}\,(a + x^2)^{-\frac{1}{2}}.\,2x\,dx = \frac{x\,dx}{\sqrt{a + x^2}}.$$

Setzen wir alles in b) ein, so erhalten wir:

$$\frac{du}{u} = \frac{dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}}}{x+\sqrt{a+x^2}} = \frac{\sqrt{a+x^2}+x}{\sqrt{a+x^2}\,(x+\sqrt{a+x^2})}\,dx = \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}$$

oder

$$d\left[\log\text{nat}\,(x+\sqrt{a+x^2})\right] = \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}.$$

33. Stellen wir die in [19] bis [32] gefundenen Differentiale zusammen, so ergiebt sich folgende Tabelle

a)	$d\,(\text{konstans}) = 0$
b)	$d\,(x \pm y) = dx \pm dy$
c)	$d\,(x\,y) = x\,dy + y\,dx$
d)	$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$
e)	$dx^n = n\,x^{n-1}\,dx$
f)	$d\,(\log\text{nat}\,x) = \frac{dx}{x}$
g)	$d\,(e^x) = e^x\,dx$
h)	$d\sin x = \cos x\,dx$
i)	$d\cos x = -\sin x\,dx$
k)	$d\,\text{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$
l)	$d\,\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
m)	$d\,\text{arc}\,\text{tang}\,x = \frac{dx}{1+x^2}$
n)	$d\left[\log\text{nat}\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)\right] = \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}$

Anwendungen der Differentialrechnung auf die analytische Geometrie.

31. Es sei eine Kurve gegeben und auf ihr die Punkte P_1 und P_2, deren Verbindungslinie die x-Axe in A unter dem Winkel φ schneiden möge (Fig. 8). Ziehen wir P_1Q_1 und P_2Q_2 senkrecht zur x-Axe, dann sind nach [8] $P_1Q_1 = y_1$ und $P_2Q_2 = y_2$ die Ordinaten, $OQ_1 = x_1$ und $OQ_2 = x_2$ die Abscissen der Punkte P_1 und P_2; ferner sei P_1R parallel zur x-Achse, so dass $\sphericalangle P_2P_1R = P_1AQ_1 = \varphi$ ist.

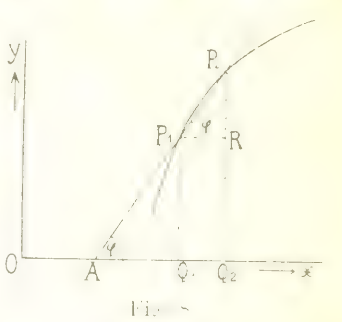


Fig. 8.

Aus der Figur folgt

$$\text{a)} \quad \operatorname{tang} P_2P_1R = P_2R : P_1R = (P_2Q_2 - P_1Q_1) : (OQ_2 - OQ_1)$$

oder

$$\operatorname{tang} \varphi = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1).$$

Die Tangente des Winkels, den die „Sekante“ P_1P_2 mit der x-Axe bildet, ist also gleich dem Quotienten aus dem Zuwachse, den y erhält, wenn wir auf der Kurve von P_1 nach P_2 wandern, dividiert durch den entsprechenden Zuwachs von x.

Lassen wir P_2 auf der Kurve unendlich nahe an P_1 heranrücken, so wird die Verbindungsgerade P_1P_2 Tangente an die Kurve, die Differenz $y_2 - y_1$ zum Differential dy und ebenso $x_2 - x_1$ zu dx, so dass für den Winkel φ, den die Tangente mit der x-Axe bildet, die Gleichung gilt:

$$\text{b)} \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Setzen wir diesen Wert für $\operatorname{tang} \varphi$ in die Gleichung der Geraden [10 c] ein, so erhalten wir:

c) $$y = \frac{dy}{dx}\, x + k'.$$

Diese Gleichung gilt für alle Punkte der Tangente, also auch für den Berührungspunkt P_1, dessen Koordinaten x_1 und y_1 wir demnach in c) einsetzen können:

d) $$y_1 = \frac{dy}{dx}\, x_1 + k'.$$

Ziehe ich d) von c) ab, so verschwindet k' und ich erhalte als Gleichung der Tangente in P_1:

e) $$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1).$$

Da der Berührungspunkt der Kurve und der Tangente gemeinsam angehört, so gelten für ihn zugleich die Gleichung e) und die Gleichung der betreffenden Kurve.

Beispiel. Die Kurve sei eine Parabel; dann gilt für jeden Punkt der Kurve die Gleichung (11 a)

f) $$y^2 = kx.$$

Aus f) kann ich $\frac{dy}{dx}$ herleiten, wenn ich differentiiere:

g) $$2y\,dy = k\,dx$$

oder

h) $$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{2y}.$$

Setze ich g) in e) ein, so erhalte ich als Gleichung der Parabeltangente:

i) $$y - y_1 = \frac{k}{2y}(x - x_1).$$

35. Um ganz allgemein auszudrücken, dass die Koordinaten eines Punktes auf einer Kurve liegen oder mit anderen Worten, dass eine veränderliche Grösse („Variable") y in gesetzmässiger Weise von einer anderen Veränderlichen

x abhängt, sagt man: y sei eine Funktion von x und schreibt:

a) $$y = f(x).$$

Auch für den Differentialquotienten dieses Ausdruckes hat man eine allgemeine Schreibweise, indem man setzt:

b) $$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Beispiel: Ist

c) $$y = f(x) = \log \text{nat}\, x.$$

Dann wird nach [33 f]

d) $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Diese Gleichung d) kann man wieder differentiieren:

e) $$d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx = f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Für $d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx$ schreibt man kürzer $\frac{d^2y}{dx^2}$, so dass

f) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Diesen Ausdruck kann man noch ein drittes Mal differentiieren: dann erhält man $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$; so gelangt man schliesslich zu der n ten „Ableitung" $f^n(x)$.

Die bildliche Bezeichnung $\frac{d^ny}{dx^n}$ oder $f^n(x)$ bedeutet also, dass die betreffende Funktion von x n mal nach der Veränderlichen x zu differentiieren und jedesmal durch dx zu dividieren ist.

In der besprochenen Schreibweise lautet die Gleichung der Tangente [34 e]:

g) $$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

36. Lassen wir auf der Kurve den Punkt P wandern und ziehen jedesmal die Tangente an die Kurve, so giebt uns die Aenderung von $\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx}$ einen Begriff von

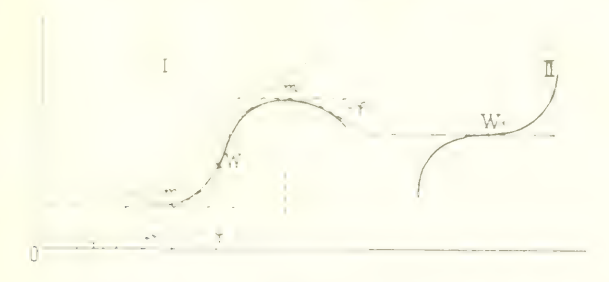


Fig. 9.

der Krümmung der Kurve. Hat die Kurve, wie in Fig. 9 I einen höchsten oder tiefsten Punkt M in dem y einen Wert erreicht, der grösser bezw. kleiner ist als die Ordinaten aller benachbarten Punkte, so ist in diesem Punkte die Tangente parallel der x-Axe, also $\varphi = 0$ und damit:

a) $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0.$$

Ob die Ordinate einer Kurve ein Maximum bezw. Minimum hat, stellt man demnach fest, indem man ihre Gleichung differentiiert und den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt; mit der so erhaltenen neuen Gleichung berechnet man die Koordinaten des höchsten bezw. tiefsten Punktes.

Um zu entscheiden, ob ein Maximum oder ein Minimum von y vorliegt, gehen wir von M auf der Kurve ein wenig weiter nach rechts: gewinnt dann der Winkel φ und damit $\operatorname{tang} \varphi$ einen negativen Wert, so handelt es sich um ein Maximum; wird $\operatorname{tang} \varphi$ positiv, so haben wir es mit einem Minimum zu tun.

Im ersten Fall ist die unendlich kleine Zunahme von $f'(x)$ mit wachsendem x negativ, im zweiten positiv.

Daraus folgt die Regel: Man differentiiere $f'(x)$ nach x; ist der für die zweite Ableitung $f''(x)$ gefundene Wert positiv, so liegt ein Minimum für $y = f(x)$ vor, ist $f''(x)$ negativ, ein Maximum.

Beispiel. Die Geschwindigkeit einer chemischen Umwandlung, die durch das entstehende Reaktionsprodukt beschleunigt wird, lässt sich nach Ostwald, Allgemeine Chemie II, 1. Seite 265 durch die Gleichung wiedergeben:

$$\text{b)} \qquad v = (k_1 + k_2 x)(A - x),$$

worin v die Geschwindigkeit, x die wachsende Konzentration des Umwandlungsproduktes, k_1, k_2 und A Konstante bedeuten (A die Anfangskonzentration des sich umwandelnden Stoffes). Mit zunehmendem x nimmt der Faktor $(A - x)$ ab, dagegen der andere Faktor $(k_1 + k_2 x)$ zu, so dass die Frage naheliegt, ob die Geschwindigkeit v mit wachsendem x ein Maximum oder Minimum hat.

Differentiiren wir die Gleichung b), so wird

$$\text{c)} \qquad dv = (k_1 + k_2 x)\,d(A - x) + (A - x)\,d(k_1 + k_2 x)$$
$$= -(k_1 + k_2 x)\,dx + (A - x)\,k_2\,dx.$$

Für den Fall eines Maximums oder Minimums wird

$$\text{d)} \qquad \frac{dv}{dx} = -k_1 - k_2 x + (A - x)\,k_2 = 0.$$

Aus d) folgt für x der Wert:

$$\text{e)} \qquad x = \frac{A k_2 - k_1}{2 k_2}.$$

Um zu entscheiden, ob im Punkte mit der durch e) bestimmten Abscisse die Ordinate v ein Maximum oder ein Minimum hat, differentiieren wir d) noch einmal und erhalten:

$$\text{f)} \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = -2 k_2.$$

Da die Konstante k, ihrer Bedeutung nach positiv ist, so ist nach b) die zweite Ableitung negativ: die Geschwindigkeit v hat also ein Maximum.

37. Aendert eine Kurve ihre Krümmung derart, dass sie von der Konkavität zur Konvexität gegen die x-Axe übergeht, so sagt man: die Kurve hat einen Wendepunkt (W in Fig. 9 I). In einem Wendepunkt erreicht, wie aus der Figur ersichtlich, φ und damit tang φ ein Maximum oder Minimum. Zur Ermittelung des Wendepunktes haben wir also dem Sinne von [36] gemäss tang $\varphi = f'(x)$ zu differentiieren und die erhaltene zweite Ableitung $f''(x) = 0$ zu setzen. Ist einmal sowohl $f'(x)$ als auch $f''(x)$ für den gleichen Wert von x gleich Null, so liegt die Wendetangente parallel zur x-Axe (Fig. 9 II).

Beispiel 1. Die Isothermen der van der Waals'schen Gleichung:

a) $$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

besitzen unterhalb der kritischen Temperatur Maximum, Wendepunkt und Minimum; im kritischen Punkte liegt die Wendetangente horizontal.

Fig. 10 zeigt die Form einiger Isothermen für Kohlensäure.

Beispiel 2. Für die Sinuslinie $f(x) = \sin x$ ist $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. $\cos x$ wird gleich Null für $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$ u. s. w., hier also hat die Sinuskurve ihre Maxima und Minima, wie schon unter [13] besprochen wurde. $f''(x) = -\sin x = 0$ trifft zu für $x = 0, \pi, 2\pi$ u. s. w., hier haben wir Wendepunkte (vergl. Fig. 4).



Fig. 10.

Reihen.

38. Eine empirisch aufgefundene zahlenmässige Beziehung zwischen zwei veränderlichen Grössen, deren gesetzmässigen Zusammenhang man nicht näher kennt (z. B. zwischen dem Volumen eines Körpers und der Temperatur oder zwischen der elektromotorischen Kraft eines Thermoelementes und der Temperatur), pflegt man durch eine Potenzreihe darzustellen, die nach Potenzen der einen Veränderlichen ansteigt, indem man setzt

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

worin a. b, c u. s. w. Konstante sind. Je mehr Glieder, je mehr Konstante die Gleichung hat, um so genauer kann sie die Beziehung wiedergeben; die Zahlenwerte der Konstanten sind aus einer möglichst grossen Anzahl genauer Einzelbeobachtungen auszurechnen.

Zu beachten ist, ob die Beziehung zwischen den beiden Veränderlichen keine plötzlichen Aenderungen erleidet, wie sie z. B. für die Ausdehnung des Wassers auftreten, wenn das Wasser aus dem festen in den flüssigen Zustand und aus diesem in den gasförmigen Zustand übergeht. Für jeden dieser drei Zustände muss eine gesonderte Gleichung der Temperaturfunktion mit neuen Zahlenwerten der Konstanten aufgestellt werden.

Stellt man die Gesamtheit der Beobachtungen durch einen Kurvenzug dar, so treten die Stellen, an denen solche Zustandsänderungen sich ereignen, in der Zeichnung durch Knicke hervor, die um so deutlicher sich ausprägen, je genauer die Kurve durch genügend zahlreiche exakte Beobachtungen zumal in der Nähe der Knickpunkte festgelegt ist und je zweckmässiger in dieser Hinsicht das Verhältnis der Massstäbe für die beiden Koordinatenaxen gewählt wird.

39. Ist für die nach [38] entwickelte Funktionsgleichung $y = f(x)$ die Funktion $f(x)$ selber bekannt, so sind die Konstanten a, b, c u. s. w. (die „Koeffizienten" der einzelnen Reihenglieder) leicht aus $f(x)$ direkt herzuleiten.

Zu diesem Zweck wird die Gleichung:

a) $$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$$

differentiiert und dadurch die neue Gleichung erhalten:

b) $$f'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \cdots$$

differentiieren wir weiter, so wird

c) $$f''(x) = 2c + 2.3dx + 3.4ex^2 + \cdots$$

d) $$f'''(x) = 2.3d + 2.3.4ex + \cdots$$

e) $$f^{IV}(x) = 2.3.4e + \cdots$$

Bezeichnen wir den Koeffizienten des $(n+1)$ Gliedes mit k_{n+1}, so wird, wie ersichtlich,

f) $$f^{n}(x) = 1.2.3.4\ldots(n-1)n.k_{n+1} + \cdots$$

Diese Reihenentwicklung ist nur zulässig, wenn $f(x)$ und seine sämtlichen Ableitungen sich stetig und eindeutig mit x ändern. Innerhalb dieses Gebietes der stetigen Aenderung liege auch der Wert $x = 0$. Setzen wir diesen besondern Wert $x = 0$ in die Gleichungen a) bis f) ein, so verschwinden alle Glieder, die x enthalten und es bleibt zurück:

g)
$$f(0) = a \qquad f'''(0) = 2.3d$$
$$f'(0) = b \qquad f^{IV}(0) = 2.3.4e$$
$$f''(0) = 2c \qquad f^{n}(0) = 1.2.3\ldots(n-1)n k_{n+1}.$$

Die Schreibweise $f(0)$ u. s. w. soll kurz den besonderen Wert bedeuten, den die Funktion $f(x)$ für $x = 0$ annimmt.

Bezeichnen wir abkürzend das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n mit $n!$ (gesprochen: n Fakultät), so können wir in die Gleichung a) für die Konstanten a, b, c u. s. w. ihre aus g) folgenden Werte

$$f(0),\ f'(0),\ \frac{f''(0)}{1.2},\ \frac{f'''(0)}{3!},\ \frac{f^{IV}(0)}{4!},\ \frac{f^{n}(0)}{n!}$$

einsetzen und erhalten so schliesslich:

$$h)\quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{IV}(0) + \cdots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} \cdots$$

Diese Reihe heisst nach ihrem Erfinder die Reihe von **Mac Laurin**.

Setzen wir für x den Ausdruck $a + x$, also für $f(x)$ nunmehr $f(a + x)$, so wird für $x = 0$ dieses $f(a + x)$ zu $f(a)$; führen wir diese Benennungen in [39 h] ein, so erhält die Reihe die Form:

$$f(a + x) = f(a) + x f'(a) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{x^3}{3!} f'''(a) + \cdots$$

Dies ist die Reihe von **Taylor**:

40. Die Reihe von Mac Laurin gestattet uns unter anderem die Funktion e^x in eine Reihe nach Potenzen von x zu verwandeln. Wir haben hier nach [33 g]

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= e^0 = 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= e^0 = 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= e^0 = 1 \\ &\ldots & &\ldots \end{aligned}$$

so dass die Reihe [39 h] die Form erhält

$$a)\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

Für $x = 1$ giebt uns die Reihe einen Wert von e, nämlich:

$$b)\quad e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

41. Die Entwicklung einer Funktion in eine unendliche Reihe hat nur dann einen praktischen Wert, wenn man die Reihe ohne wesentlichen Fehler nach einer endlichen Zahl von Gliedern abbrechen darf; der dann noch verbleibende **Rest** muss sich also mit wachsender Zahl der berücksichtigten Glieder dem Grenzwerte **Null** nähern

d. h. es muss sein, wenn n die Zahl dieser Glieder bedeutet,

a) $$\lim_{n=\infty} R = 0.$$

Um uns einen allgemeinen Ausdruck für das Restglied der Mac Laurinschen Reihe [39 h] zu verschaffen, wollen wir die Reihe z. B. nach dem vierten Gliede abbrechen und setzen:

b) $$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + R$$

worin der Rest

c) $$R = \frac{x^4}{4!} f^{(IV)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(V)}(0) + \frac{x^6}{6!} f^{(VI)}(0) + \ldots$$

Dann ist zunächst klar, dass R grösser ist als $\frac{x^4}{4!} f^{(IV)}(0)$, (nämlich um alle folgenden Glieder).

Zweitens ist aber R kleiner als $\frac{x^4}{4!} \cdot f^{(IV)}(x)$; denn wenn wir die mit [39 h] zusammenfallende Gleichung:

d) $$f(x) - \left[f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) \right]$$
$$= \frac{x^4}{4!} f^{(IV)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(V)}(0) + \frac{x^6}{6!} f^{(VI)}(0) + \ldots$$

viermal differentiieren, so erhalten wir, da die Faktoren $f(0)$ u. s. w. konstante Grössen sind,

e) $$f^{(IV)}(x) = f^{(IV)}(0) + x f^{(V)}(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f^{(VI)}(0) + \ldots$$

und es wird, wenn wir mit $\frac{x^4}{4!}$ multiplizieren:

f) $$\frac{x^4}{4!} f^{(IV)}(x) = \frac{x^4}{4!} f^{(IV)}(0) + \frac{x^5}{4!} f^{(V)}(0) + \frac{x^6}{4! \, 1 \cdot 2} f^{(VI)}(0) + \ldots$$

Dieser Ausdruck f) ist augenscheinlich grösser als e), weil $\frac{1}{4!}$ grösser ist als $\frac{1}{5!}$, $\frac{1}{4!\,1.2}$ grösser als $\frac{1}{6!}$ u. s. w.

Es ist also R grösser als $\frac{x^4}{4!}\cdot f^{IV}(0)$ und kleiner als $\frac{x^4}{4!} f^{IV}(x)$.

g) $$\frac{x^4}{4!} f^{IV}(0) < R < \frac{x^4}{4!} f^{IV}(x).$$

Da die Funktion nach Voraussetzung [39] stetig ist, so wird es sicherlich einen zwischen 0 und x liegenden Wert θx geben (worin θ ein echter Bruch ist), für den

h) $$R = \frac{x^4}{4!} f^{IV}(\theta x).$$

Brechen wir die Reihe statt nach 4 nach n Gliedern ab, so lautet das „Restglied":

i) $$R = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x).$$

Anmerkung: Diese kurze Herleitung der allgemeinen Form von R gilt unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ und die sämtlichen Ableitungen positiv sind und dass von vorn herein die Zulässigkeit dieser Entwickelung nicht in Zweifel gezogen wird.

Beispiel 1. Wenden wir das Gelernte auf die Reihe für e^x [40 a] an, so wird dort

$$R = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

Hierin ist $e^{\theta x}$ eine endliche Grösse; $\frac{x^n}{n!}$ wird von einem gewissen Gliede an, nämlich sobald $n! > x^n$ wird [1]), ein echter

1) So wird für $x = 2$ schon bei $n = 4$ der Quotient

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2}{3}$$

ein echter Bruch.

Bruch, der für $n = \infty$ verschwindet. Es ist also

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} = 0;$$

die Reihe für e^x ist „k o n v e r g e n t“ (d. h. sie hat einen e n d l i c h e n Wert).

42. Entwickeln wir die Funktion

a) $$f(x) = \log \text{nat}\, (1+x)$$

in eine Reihe nach [39 h], so ergiebt sich:

$$f(0) = \log \text{nat}\, 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = +1 \, . \, 2\,(1+x)^{-3} \qquad f'''(0) = 1 \, . \, 2$$

$$f^{IV}(x) = -1 \, . \, 2 \, . \, 3\,(1+x)^{-4} \qquad f^{IV}(0) = -1 \, . \, 2 \, . \, 3 \text{ u. s. w.,}$$

b) $$\log \text{nat}\, (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Hier ist

c) $$R = \frac{x^n}{n!} \left(\pm (n-1)!\,(1+\theta x)^{-n}\right) = \pm \frac{x^n}{n\,(1+\theta x)^n}$$

Darin ist

d) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Der Quotient $\frac{x}{1+\theta x}$ ist sicher ein echter Bruch, wenn x selber ein echter Bruch (oder $= 1$) ist, dann wird

e) $$\lim_{n=\infty} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n = 0$$

und damit auch der Grenzwert von $R = 0$.

Die Reihe [42 b] ist also konvergent, wenn x zwischen 0 und 1 liegt.

Anmerkung 1. Setzen wir $x = 1$, so können wir aus der Reihe [42 b] den Zahlenwert von log nat 2 ausrechnen. In Wirklichkeit benutzte man freilich zur Ausrechnung der Logarithmen andere aus [42 b] abgeleitete Reihen, die weit rascher konvergieren, so dass man viel weniger Glieder gebraucht, um die Logarithmen auf die gewünschte Anzahl Dezimalen auszurechnen.

Anmerkung 2. log nat x kann man nicht in eine Reihe entwickeln, weil für $x = 0$ $f(x) = \log \text{nat}\, 0 = -\infty$ wird.

43. Für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ liefert die Reihe von Mac Laurin die Entwickelung:

$$\text{a)} \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots\cdots$$

Die Reihe erhält man übrigens auch sehr einfach durch Ausdividieren des Bruches $\frac{1}{1+x}$.

Ist x sehr klein, etwa gleich der sehr kleinen Grösse δ, so kann ich ohne wesentlichen Fehler die Reihe vor x^2 abbrechen und so zur Näherungsformel gelangen

$$\text{b)} \qquad \frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta;$$

für negatives x ergiebt sich die Näherungsformel

$$\frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta.$$

44. Beachtung verdienen noch die Reihen

$$\text{a)} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$$

$$\text{b)} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$

$$\text{c)} \qquad \operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Setzen wir in c) $x = 1$, so wird, da der Wert 1 der Tangente des Winkels 45° $\left(= \frac{\pi}{4}\right)$ zukommt:

$$\text{d)} \qquad \operatorname{arc\,tang} 1 = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Aus dieser Reihe liesse sich die Zahl π berechnen; in Wirklichkeit benutzt man zu dieser Rechnung andere Reihen, die viel schneller konvergieren.

Partielle Differentialquotienten.

45. Die Gleichung von **van der Waals** [37a] trägt der Tatsache Rechnung, dass das Volumen eines Gases oder einer Flüssigkeit sowohl von dem Druck als auch von der Temperatur abhängt. Wollen wir diesen Zusammenhang zwischen v, p und T in ganz allgemeiner Form ausdrücken, so schreiben wir:

$$\text{a)} \qquad v = f(p, T),$$

d. h. v ist eine Funktion von p und T.

Ebenso wird die Annahme, dass eine Grösse u von den beiden Variabeln x und y abhängig ist, dargestellt durch:

$$\text{b)} \qquad u = f(x, y).$$

Um festzustellen, wie sich u ändert, wenn sowohl x um dx, wie y um dy zunimmt, zerlegen wir die Änderung in zwei Vorgänge, indem wir einmal die Änderung von u für den Fall bestimmen, dass x allein um dx zunimmt, während y konstant bleibt, und zweitens für den andern Fall, dass y um dy zunimmt, während x konstant gehalten wird.

Als wir früher [35] die Gleichung $y = f(x)$ behandelten, schrieben wir ihre Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$; jetzt, wo wir es mit

einer Funktion mehrerer Veränderlichen zu tun haben, deuten wir die Aufforderung, nur nach einer Veränderlichen zu differentieren durch die Schreibweise an:

c) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{bezw.} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Durch ein gebogenes ∂ kennzeichnen wir also die „partiellen“ Differentialquotienten.

In [22] haben wir schon von der partiellen Differentiation Gebrauch gemacht, um das „totale“ Differential von $f(x, y) = x \,.\, y$ herzuleiten, und gefunden:

d) $$d(x \,.\, y) = y\,dx + x\,dy.$$

Differentiieren wir $f(x, y) = x \,.\, y$ partiell nach x, während y konstant bleibt, so erhalten wir:

e) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx = y\,dx.$$

Durch partielle Differentiation nach y erhalten wir in diesem Falle:

f) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy = x\,dy.$$

Durch Vergleich von e) und f) mit d) mögen wir aus diesem Beispiel ersehen, dass das totale Differential von $f(x, y)$ gegeben wird durch die Gleichung:

g) $$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy$$

oder noch kürzer nach b):

h) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Beispiel: Der Energieinhalt eines Systems, z. B. einer gegebenen Gasmenge, sei in seiner Abhängigkeit von Vo-

lumen und Temperatur durch die Gleichung:

i) $$U = f(v, T)$$

dargestellt. Ändern sich Volumen und Temperatur unendlich wenig, so wird die unendlich kleine Änderung der Energie gegeben durch die Gleichung

k) $$dU = \frac{\partial U}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial U}{\partial T} \cdot dT.$$

Für ein „ideales" Gas ist die Änderung der Energie mit dem Volumen bei konstant gehaltener Temperatur gleich Null, also:

l) $$\frac{\partial U}{\partial v} = 0$$

und k) vereinfacht sich zu:

m) $$dU = \frac{\partial U}{\partial T} \cdot dT.$$

Die Änderung der Energie mit der Temperatur bei konstantem Volumen, bezogen auf die Einheit der Masse und verglichen mit dem Normalstoff Wasser ist gleich der „spezifischen Wärme bei konstantem Volumen" c_v; bezieht man also U auf die Masseneinheit, so wird

n) $$\frac{\partial U}{\partial T} = c_v \quad \text{und für ein ideales Gas} \quad dU = c_v dT.$$

Eine etwas andere Schreibweise der partiellen Differentialquotienten gebraucht Planck in seinen trefflichen „Vorlesungen über Thermodynamik"; er setzt sie in Klammern und fügt rechts unten an die Klammer die Variablen hinzu, die für die verlangte Differentiation als konstant gelten sollen. Bei ihm würde die Gleichung [45k] lauten:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v dT.$$

46. Auch bei der partiellen Differentiation können wir nicht nur die ersten, sondern auch die höheren Differentiale bilden, deren allgemeine Form freilich hier wesentlich komplizierter ausschaut. So wird z. B.:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx \cdot dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dy^2$$

Wir wollen uns an einem Beispiel einen hierher gehörigen Satz herleiten. Es sei:

a) $$u = f(x, y) = x^2 y^2.$$

Dann ist

b) $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2$$

und

c) $$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 y.$$

Differentiieren wir nun b) partiell nach y, so wird:

d) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = 4xy$$

und, wenn wir c) partiell nach x differentiieren:

e) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x} = 4xy.$$

Wir bekommen also das gleiche Resultat, ob wir zuerst nach x und dann nach y partiell differentiieren oder zuerst nach y und dann nach x.

f) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}.$$

Die Reihenfolge der Differentiationen ist willkürlich.

Integralrechnung.

17. So interessant es auch ist, das Wachsen einer Funktion in einem unendlich kleinen Abschnitt festzustellen, so ist jene Aufgabe für uns in erster Linie nur das Mittel zum Zweck, die Zunahme in einer endlichen Spanne zu bestimmen. Diese zweite Aufgabe wird, wie wir

schon in [17] und [18] sahen, durch die Integration des Differentials erfüllt. Aus [17] ergiebt sich, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, gerade wie die Multiplikation die Umkehrung der Division ist. Beide Operationen nach einander an einer Funktion angewandt, heben einander auf; es ist also:

a) $$\int f'(x)\,dx = f(x).$$

Da nun aber das Differential $f'(x)\,dx$ ebenso gut durch Differentiation von $f(x) + K$ entstanden sein kann, wenn K eine Konstante ist [19], so ist a nur ein besonderer Fall der allgemeinen Gleichung:

b) $$\int f'(x)\,dx = f(x) + K.$$

Man bezeichnet in diesem Falle K als die Integrationskonstante.

48. Setzen wir für $f(x)$ die Funktionen ein, deren Differentiale wir in [33] zusammengestellt haben, so erhalten wir nach [47 b] folgende Auflösungen von Integralen:

a) $$\int (dx \pm dy) = \int dx \pm \int dy = x \pm y + K$$

b) $$\int (x\,.\,dy + y\,dx) = x\,.\,y + K$$

c) $$\int \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \frac{x}{y} + K$$

d) $$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + K$$

e) $$\int \frac{dx}{x} = \log\,\mathrm{nat}\,x + K$$

f) $$\int e^x\,dx = e^x + K$$

g) $$\int \cos x\,dx = \sin x + K$$

h) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + K.$$

i) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\,x + K$$

k) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \mathrm{arc}\,\sin x + K$$

h) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + K$$

i) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log \text{nat} \left[x + \sqrt{a+x^2}\right] + K.$$

49. Meist haben die bei unseren Rechnungen vorkommenden Integrale nicht gerade eine in der obigen Aufzählung [48] enthaltene Form, lassen sich aber mehr oder minder einfach auf eine dieser Formen zurückführen. Zu diesem Zwecke dient z. B. die Substitution der gegebenen Veränderlichen durch eine andere von passender Form.

Beispiel 1. Es sei aufzulösen

$$\int \sqrt{x}\, dx.$$

Setzen wir $x = u^2$, so wird $\sqrt{x} = u$ und $dx = 2u\,du$; führen wir diese Werte in das Integral ein, so erhalten wir

a) $$\int \sqrt{x}\, dx = \int u \,.\, 2u\,du = \int 2u^2\, du.$$

Dieses Integral fällt in die Gruppe [48 d]; n ist hier $= 2$, also $n + 1 = 3$ und es wird:

b) $$\int 2u^2\, du = 2 \cdot \frac{u^3}{3} + K.$$

Erinnern wir uns der Bedeutung von u, so erhalten wir schliesslich:

c) $$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x} + K.$$

Anmerkung: Ebenso wie bei Differentiation [23], kann man sinngemäss bei der Integration einen konstanten Faktor vor das Integralzeichen ziehen z. B. für $\int 2u^2\, du$ schreiben $2\int u^2\, du$.

Beispiel 2. Es sei aufzulösen:

$$\int \frac{1}{a + bx}\, dx.$$

Setzen wir $a + bx = z$, so wird $dz = b\,dx$ und $dx = \frac{1}{b}\, dz$.

führen wir diese Werte ein, so wird

d) $$\int \frac{dx}{a - bx} = \int \frac{dz}{-bz} = -\frac{1}{b}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{b} \log \text{nat}\, z$$

wie sich aus [48e] ergiebt. Führen wir für z wieder seinen Wert ein, so wird schliesslich

e) $$\int \frac{1}{a - bx}\, dx = -\frac{1}{b} \log \text{nat}\, (a - bx) + K.$$

50. Das Integral $\int \frac{x^2}{1-x}\, dx$ können wir in mehrere einfachere Integrale zerlegen, indem wir den Bruch $\frac{x^2}{1-x}$ in eine Summe von Brüchen umwandeln. Dies können wir durch Ausdividieren erreichen oder, was sachlich auf dasselbe hinauskommt, indem wir den Zähler x^2 schreiben:

a) $$x^2 = x^2 - 1 + 1 = (x + 1)(x - 1) + 1. \quad \text{(vergl. 2a)}$$

Dann wird

b) $$\frac{x^2}{1-x} = -\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - \frac{1}{x-1} = -x - 1 - \frac{1}{x-1}$$

und

c) $$\int \frac{x^2}{1-x}\, dx = -\int (x + 1)\, dx - \int \frac{dx}{x-1}$$
$$= -\int x\, dx - \int dx - \int \frac{dx}{x-1}.$$

Berücksichtigen wir [48d] und [49e], wobei in [49e] $a = 1$, $b = 1$ zu setzen ist, so wird

d) $$\int \frac{x^2}{1-x}\, dx = -\frac{x^2}{2} - x - \log \text{nat}\, (1 - x) + K.$$

51. Im Integral $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$ können wir den Bruch $\frac{1}{(a-x)(b-x)}$ in zwei Brüche zerlegen, indem wir setzen:

a) $$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}.$$

worin A und B Konstante sind, deren Wert im folgenden zu ermitteln ist. Wenn wir rechts auf einen Bruchstrich bringen, wird:

$$\text{b)}\qquad \frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A(b-x)+B(a-x)}{(a-x)(b-x)}$$

oder

$$\text{c)}\qquad 1 = A(b-x) + B(a-x).$$

Da diese Gleichung nur durch Umformung eines gegebenen Ausdruckes entstanden ist, so muss sie identisch erfüllt sein; sie bietet uns nicht etwa einen Wert für die Veränderliche x, sondern sie muss für alle Werte von x gelten z. B. auch für $x = 0$.

Solche identische Gleichung hatten wir schon in [39a] aufgestellt.

Setzen wir $x = 0$, so wird aus c)

$$\text{d)}\qquad 1 = Ab + Ba.$$

Differentiieren wir c) nach x, so wird:

$$\text{e)}\qquad 0 = -A - B.$$

Aus d) und e) ergiebt sich:

$$\text{f)}\qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{b-a} \\[2ex] B = \dfrac{1}{a-b} \end{cases}.$$

Setzen wir diese Werte für A und B in a ein, so wird

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{(b-a)(a-x)} + \frac{1}{(a-b)(b-x)}$$

und

$$\text{g)}\qquad \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a}\int\frac{dx}{a-x} + \frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{b-x}$$

$$= -\frac{1}{b-a}\log\operatorname{nat}(a-x) - \frac{1}{a-b}\log\operatorname{nat}(b-x) + K.$$

Nach 6d) lässt sich dieses Resultat noch einfacher schreiben, wenn wir für $-\frac{1}{b-a}$ setzen: $\frac{1}{a-b}$ und die Differenz der Logarithmen in einen Logarithmus zusammenzuziehen; so erhalten wir schliesslich:

$$\text{h)} \qquad \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{a-b} \log \text{nat} \frac{a-x}{b-x} + K.$$

52. Für einen Nenner mit 3 Faktoren z. B. $(a-x)(b-x)(c-x)$ sind drei Partialbrüche zu bilden, deren Zähler sich nach dem oben dargelegten Verfahren aus drei Gleichungen ermitteln lassen.

In dem besonderen Falle, dass zwei Faktoren des Nenners einander gleich sind, würde das bisherige Verfahren der Zerlegung nicht zum Ziele führen.

Haben wir z. B.

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2(b-x)},$$

so setzen wir

$$\text{a)} \qquad \frac{1}{(a-x)^2(b-x)} = \frac{A}{(a-x)^2} + \frac{B}{(a-x)} + \frac{C}{b-x},$$

dann wird:

$$\text{b)} \qquad 1 = A(b-x) + B(a-x)(b-x) + C(a-x)^2.$$

Setzen wir in dieser identischen Gleichung $x = 0$, so wird

$$\text{c)} \qquad 1 = A.b + Ba.b + Ca^2.$$

Differentiieren wir b), so wird:

$$\text{d)} \qquad 0 = -A - B(a-x) - B(b-x) - 2C(a-x).$$

Für $x = 0$, geht d) über in

$$\text{e)} \qquad 0 = -A - Ba - Bb - 2Ca.$$

Differentiieren wir d) nach x, so wird:

$$0 = -2B - 2C.$$

Aus den 3 Gleichungen c), e) und f) erhalten wir

$$\text{g)}\quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{a-b} \\[2ex] B = -\dfrac{1}{(a-b)^2} \\[2ex] C = +\dfrac{1}{(a-b)^2}. \end{cases}$$

Rascher hätten wir die Werte für A, B und C erhalten, wenn wir die Gleichung b) ausmultipliziert und beachtet hätten, dass die Gleichung:

$$\text{h)}\quad \begin{aligned} 1 &= Ab - Ax + Bab - Bbx - Bax + Bx^2 + Ca^2 - 2Cax + Cx^2 \\ &= Ab + Bab + Ca^2 - (A + Bb + Ba + 2Ca)x + (B + C)x^2 \end{aligned}$$

identisch erfüllt sein muss, d. h. dass die „Koeffizienten“ der Glieder ohne x („nullten Grades“), mit x (ersten Grades) und mit x^2 (zweiten Grades) rechts und links gleich sein müssen. Da links die Glieder nullten Grades den Koeffizienten 1, die ersten und zweiten Grades den Koeffizienten 0 haben, so zerfällt h) in folgende 3 Gleichungen:

$$\text{i)}\quad \begin{cases} 1 = Ab + Bab + Ca^2 \\ 0 = A + Bb + Ba + 2Ca \\ 0 = B + C \end{cases}$$

die mit den früher auf umständlicherem Wege erhaltenen Gleichungen c), e) und f) übereinstimmen.

Setzen wir die Werte für A, B und C aus g) in a) ein, so zerfällt das gegebene Integral in folgender Weise:

$$\text{k)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{(a-x)^2(b-x)} = -\frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{(a-x)^2} - \frac{1}{(a-b)^2}\int\frac{dx}{a-x} \\[2ex] \displaystyle\qquad + \frac{1}{(a-b)^2}\int\frac{dx}{b-x} \\[2ex] \displaystyle\qquad = -\frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}\log\text{nat}\,\frac{a-x}{b-x} \end{cases}$$

$\int \frac{dx}{(a-x)^2}$ geht für $a-x = z$ über in $-\int \frac{dz}{z^2}$; dieses Inte-

gral fällt unter [48d] für $n = -2$:

l) $$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = -\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a-x},$$

so dass wir schliesslich erhalten:

m) $$\int \frac{dx}{(a-x)^2(b-x)} = -\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{a-x} + \frac{1}{(a-b)^2} \log \text{nat} \frac{a-x}{b-x} + K.$$

53. Auf einem ganz anderen Wege wie die Methode der Teilbrüche führt die **Teilintegration** von verwickelteren zu einfacheren Integralen. Wir haben nach [22

a) $$d(u \cdot v) = v \cdot du + udv.$$

Integrieren wir, so wird

b) $$u \cdot v = \int vdu + \int udv$$

oder

c) $$\int vdu = u \cdot v - \int udv.$$

Es gilt in einem gegebenen Integral v und du so zu bestimmen, dass $\int udv$ leichter löslich ist als das ursprüngliche Integral.

Beispiel: In dem Integral

$$\int x \cdot \cos xdx$$

wählen wir $v = x$, dann wird $du = \cos xdx$, also $u = \sin x$; mithin ist nach c)

$$\int x \cos xdx = x \cdot \sin x - \int \sin xdx$$
$$= x \cdot \sin x + \cos x + K.$$

54. Ein weiterer Weg zur Auflösung eines Integrales ist die Entwickelung in **Reihen**.

Beispiel: Wir wollen einmal das Integral

$$\int \frac{dx}{1-x}$$

nach diesem Verfahren auflösen. Dividieren wir 1 durch $1-x$, so wird

$$\text{a)} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

und damit

$$\text{b)} \qquad \int \frac{dx}{1-x} = \int dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx + \int x^3\,dx + \int x^4\,dx + \cdots$$

$$\text{c)} \qquad = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Andererseits zeigt die Substitution $1 - x = z$, dass

$$\text{d)} \qquad \int \frac{dx}{1-x} = -\log \operatorname{nat} (1-x).$$

Folglich erhalten wir als Reihenentwickelung von $\log \operatorname{nat} (1-x)$:

$$\text{e)} \qquad \log \operatorname{nat} (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$

wie wir schon früher [42b] unter Benutzung der Mac Laurinschen Reihe gefunden hatten.

Bestimmte Integrale.

55. Das unbestimmte Integral

$$\text{a)} \qquad \int f'(x)\,dx = f(x) + K$$

werde näher bestimmt durch die Festsetzung, dass die durch das Integralzeichen verlangte Summierung sich nur bis zum Werte $x = b$ erstrecken soll; dann wird [vergl. 18]

$$\text{b)} \qquad \int^b f'(x)\,dx = f(b) + K.$$

Die Integrationskonstante K wird festgelegt, wenn wir

den Wert von x kennen, für den das Integral den Wert 0 annimmt („verschwindet"); sei dieser Wert a, so wird

$$0 = f(a) + K$$

oder

c) $$K = -f(a).$$

Setzen wir diesen Wert von K in b) ein, so wird

d) $$\underline{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).}$$

Das bestimmte Integral ist gleich der Differenz der Sonderwerte, die das unbestimmte Integral für den oberen und den unteren Grenzwert der Veränderlichen annimmt.

Anmerkung: An der Funktion selber kann man die Grenzen durch die Schreibweise: $[f(x)]_a^b$ ausdrücken (vergl. unten [55g]).

Beispiel: Dehnt sich eine Gasmenge gegen einen Druck p um den unendlich kleinen Betrag dv aus, so ist die vom Gase dabei geleistete Arbeit (vergl. [1]) $p\,dv$; bei einer endlichen Volumenänderung wird die Arbeit gegeben durch das Integral

$$\int p\,dv$$

und zwar, wenn sich das Gas vom Volumen v_1 auf das Volumen v_2 ausdehnt, durch das bestimmte Integral

e) $$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv.$$

Wird während der Ausdehnung die Temperatur des Gases durch Wärmezufuhr konstant gehalten, so ist nach dem Boyleschen Gesetz

f) $$p \cdot v = k \quad \text{oder} \quad p = \frac{k}{v}.$$

Setzen wir diesen Wert für p in das Integral ein, so nimmt es die Form an:

g) $$\begin{aligned} k\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} &= k\,[\log\text{nat}\,v]_{v_1}^{v_2} \\ &= k\,(\log\text{nat}\,v_2 - \log\text{nat}\,v_1) \\ &= k\log\text{nat}\,\frac{v_2}{v_1}. \end{aligned}$$

Anmerkung: Stellen wir den Vorgang zeichnerisch dar, (Fig. 11) indem wir p als Ordinate und v als Abscisse in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eintragen [vergl. Fig. 2], so wird die Arbeit pdv durch den schmalen Streifen $AA'C'C$ dargestellt, und das Integral $\int_{v_1}^{v_2} pdv$ durch die Fläche $ABDC$.


Fig. 11

Wir hätten in der Zerlegung der Fläche noch weiter gehen können, indem wir den schmalen Streifen $AA'C'C$ durch unendlich viele Horizontale, die von einander um dp entfernt seien, in winzige Teilchen von der Grösse $dp.dv$ zerschnitten. Dann ist der Streifen $AA'C'C$ gegeben durch das Integral

$$\int_0^p dpdv$$

und die Fläche $ABDC$ wird nunmehr durch das Doppelintegral

$$\int_{v_1}^{v_2} \int_0^p dpdv$$

dargestellt.

Zur Auflösung dieses Doppelintegrals gehen wir den umgekehrten Weg Schritt für Schritt: wir bauen zunächst den Streifen $AA'C'C$ auf, indem wir $dp.dv$ bei konstantem dv von $p = 0$ bis $p = p$ integrieren und so pdv als Inhalt dieses Streifens erhalten. Damit sind wir wieder bei dem einfachen Integral $\int_{v_1}^{v_2} pdv$ angelangt, das wir in [55g] auflösten.

Entsprechend wird ein Körper aus unendlich kleinen Parallelepipeden aufgebaut durch das dreifache Integral

$$\int\int\int dx.dy.dz$$

Differentialgleichungen.

56. Gleichungen, in denen Differentiale vorkommen, „Differentialgleichungen", sind durch Integration auf gewöhnliche Gleichungen zurückzuführen.

In 34 h) hatten wir bereits eine Differentialgleichung:

a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{2y}$$

aufgestellt. Ordnen wir diese Gleichung nach den Veränderlichen x und y, so erhalten wir:

b) $$2y\,dy = k\,dx$$

und durch Integration:

c) $$\int 2y\,dy = k\int dx$$

oder

d) $$y^2 = k \,.\, x + K.$$

Ebenso wird die Differentialgleichung:

e) $$\frac{dy}{dx} = k\,y$$

behandelt. Ordnen wir, so wird

f) $$\int \frac{dy}{y} = k\,dx$$

und damit

g) $$\log \operatorname{nat} y = k \,.\, x + K.$$

57. Beispiele für Differentialgleichungen von der Form [56 e)] liefert die Lehre von der Reaktionsgeschwindigkeit in homogenen Systemen.

Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Stoff umwandelt, wird durch die Änderung seiner Konzentration in der Zeiteinheit gegeben:

h) $$v = \frac{dC}{dt}$$

(darin bedeutet v die Reaktionsgeschwindigkeit, dC die unendliche kleine Zunahme der Konzentration C in der unendlich kleinen Zeitspanne dt).

Beispiel: Wird Rohrzucker in verdünnter wässriger Lösung erhitzt, so spaltet er sich in Dextrose und Lävulose; die Reaktionsgeschwindigkeit ist jedem Augenblick der Konzentration des noch vorhandenen Rohrzuckers propor-

tional. Da seine Konzentration durch die Reaktion abnimmt, so ist dC mit negativem Vorzeichen zu versehen und wir erhalten die Differentialgleichung

a) $$-\frac{dC}{dt} = k \cdot C$$

oder geordnet

b) $$-\frac{dC}{C} = k\,dt.$$

Die Integration ergiebt

c) $$-\log \text{nat}\, C = k \cdot t + K.$$

Die Integrationskonstante K wird durch die Angabe bestimmt, dass bei Beginn der Reaktion zur Zeit $t = 0$ die Konzentration $C = C_0$ ist. Setzen wir in c) $t = 0$ und für C die Anfangskonzentration C_0, so wird

d) $$-\log \text{nat}\, C_0 = K$$

und dies in c) eingesetzt

e) $$\log \text{nat}\, \frac{C_0}{C} = kt.$$

Bezeichnen wir die Konzentration des Rohrzuckers nach der Zeit t mit C_t, so wird C_t gegeben durch:

f) $$\log \text{nat}\, \frac{C_0}{C_t} = kt$$

oder

g) $$\frac{C_0}{C_t} = e^{kt}$$

und schliesslich

h) $$C_t = C_0 \cdot e^{-kt}.$$

Anmerkung: Würden wir a die ursprüngliche Menge, x die nach der Zeit t umgewandelte Menge des Rohrzuckers nennen, so hätten wir die Differentialgleichung

i) $$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

aufzustellen. Aus

k) $$\int \frac{dx}{a - x} = \int k\,dt$$

folgt

l) $$-\log \text{nat} (a-x) = kt + K.$$

Da für $t = 0$ auch $x = 0$ ist, so wird

m) $$K = -\log \text{nat}\, a$$

und aus l):

n) $$kt = \log \text{nat} \frac{a}{a-x}.$$

Während des Verlaufes dieser „monomolekularen" Reaktion muss also der Ausdruck:

$$\frac{1}{t} \log \text{nat} \frac{a}{a-x} = k$$

konstant bleiben.

58. Für die Verseifung von Aethylacetat durch Natronlauge

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH = CH_3COONa + C_2H_5OH$$

gilt, wenn a die Anfangskonzentration des Esters und b die der Base bedeutet,

a) $$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x);$$

x ist die nach der Zeit t umgesetzte Menge des Esters wie der Base, weil beide Molekül für Molekül auf einander einwirken und in gleichem Masse verschwinden.

Das Integral der geordneten Gleichung:

b) $$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\,dt$$

ist nach [51 b]

c) $$\frac{1}{a-b} \log \text{nat} \frac{a-x}{b-x} = kt + K.$$

Für $t = 0$ wird $x = 0$, also

d) $$K = -\frac{1}{a-b} \cdot \log \text{nat} \frac{a}{b}.$$

Setzen wir diesen Wert in c) ein, so wird

e) $$\frac{1}{a-b} \log \text{nat} \frac{(a-x)b}{(b-x)a} = kt.$$

Die Verseifung der Ester ist ein Musterbeispiel für **bimolekulare Reaktionen**; für diese soll also der Ausdruck

f) $$\frac{1}{t(a-b)} \log \text{nat} \frac{(a-x)b}{(b-x)a} = k$$

konstant bleiben.

Werden die Anfangskonzentrationen von Ester und Base gleich genommen, also $b = a$, so wird

g) $$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = kt$$

und, wenn wir $a - x = u$ setzen (wodurch $dx = -du$ wird),

h) $$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = -\int \frac{du}{u^2} = +\frac{1}{u} = \frac{1}{a-x}$$

also nach g):

i) $$\frac{1}{a-x} = kt + K.$$

Da für $t = 0$ auch $x = 0$ wird, so ist

k) $$K = \frac{1}{a}$$

und aus i) wird:

l) $$\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} = kt$$

oder

m) $$\frac{x}{a(a-x)} = kt.$$

59. Für **trimolekulare Reaktionen** wird, wenn die Anfangskonzentrationen aller drei reagierenden Stoffe gleich sind, die Reaktionsgeschwindigkeit:

a) $$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^3,$$

woraus folgt:

b) $$\int \frac{dx}{(a-x)^3} = kt.$$

Setze ich wieder $a - x = u$, so erhalte ich $-\int \frac{du}{u^3}$ und nach [48d] ($n = -3$):

c) $$\int \frac{dx}{(a-x)^3} = \frac{1}{2}(a-x)^{-2},$$

also

d) $$\frac{1}{2(a-x)^2} = kt + K.$$

Da

e) $$K = \frac{1}{2a^2}$$

ist, so wird schliesslich

d) $$\frac{x(2a-x)}{t \cdot 2a^2(a-x)^2} = k.$$

Der Fall, dass von den drei nur zwei Anfangskonzentrationen gleich sind, giebt das Integral

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2(b-x)},$$

das in [52m] gelöst wurde.

60. Wenn sich aus Äthylalkohol und Essigsäure Äthylacetat bildet nach der chemischen Gleichung:

a) $$C_2H_5OH + CH_3COOH = C_2H_5OOC_2H_3 + H_2O,$$

so wird umgekehrt durch das Wasser der entstandene Ester verseift, so dass wir hier den Fall zweier entgegengesetzter Reaktionen haben und die resultierende Geschwindigkeit der Esterbildung die Differenz der beiden Reaktionsgeschwindigkeiten wird. Sei die Anfangskonzentration des Alkohols wie der Säure = 1, zur Zeit t die Konzentration des Esters $= x$ und ebenso die des Wassers $= x$ [1]), so wird die Geschwindigkeit des von links nach rechts verlaufenden Vorganges $k(1-x)^2$; der von rechts nach links verlaufende Verseifungsprozess zeigt die Geschwindigkeit $k_1 x^2$. Die resultierende Geschwindigkeit der Esterbildung wird also:

1) Es waren wasserfreier Alkohol und wasserfreie Essigsäure zusammengegeben worden.

b) $$\frac{dx}{dt} = k(1-x)^2 - k_1 x^2 \text{ [1]}.$$

Der Nenner des Integrals

c) $$\int \frac{dx}{k(1-x)^2 - k_1 x^2}$$

$k(1-x)^2 - k_1 x^2$ lässt sich auf die Form $(w_1 - x)(w_2 - x)$ bringen, worin w_1 und w_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

d) $$k(1-x)^2 - k_1 x^2 = 0$$

bedeuten.

Multiplizieren wir d) aus und ordnen, so hat

e) $$(k - k_1)x^2 - 2kx + k = 0$$

nach [3] die Wurzeln:

f) $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{k}{k-k_1} + \sqrt{-\dfrac{k}{k-k_1} + \left(\dfrac{k}{k-k_1}\right)^2} = w_1 \\[2ex] x_2 = \dfrac{k}{k-k_1} - \sqrt{-\dfrac{k}{k-k_1} + \left(\dfrac{k}{k-k_1}\right)^2} = w_2. \end{cases}$$

Diese Werte sind in

$$\int \frac{dx}{(w_1 - x)(w_2 - x)}$$

einzusetzen, nachdem wir es [51h] folgend aufgelöst haben.

Anmerkung: In diesem besondern Fall ist, wie Berthelot fand

$$\frac{k}{k_1} = 4, \quad \text{also} \quad \frac{k}{k-k_1} = \frac{4}{3};$$

dann können wir die Wurzel in e) ziehen und erhalten

$$w_1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

$$w_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

---

1) Die Esterbildung kommt zum Stillstand, es tritt Gleichgewicht ein, wenn $k(1-x)^2 - k_1 x^2 = 0$ ist.

61. Ist von Anfang an die Menge des Wassers so gross, dass wir seine Konzentration während des ganzen Vorganges als konstant annehmen können, so wird die Verseifungsgeschwindigkeit proportional der Esterkonzentration x und dieser Vorgang scheinbar monomolekular.

Nimmt man die Mengen des Alkohols und des Wassers im Verhältnis zur Säuremenge sehr gross, so kann man die Konzentration der ersten beiden als konstant ansehen; wir haben dann anscheinend zwei monomolekulare Reaktionen und die resultierende Geschwindigkeit wird:

$$\text{a)} \qquad \frac{dx}{dt} = k(a-x) - k_1 x.$$

Das Integral

$$\text{b)} \qquad \int \frac{dx}{k(a-x) - k_1 x} = \int \frac{dx}{ka - (k+k_1)x}$$

ist von der Form $\int \frac{dx}{\alpha + \beta x}$, worin $\alpha = ka$ und $\beta = -(k+k_1)$ zu setzen ist; dann ist nach [49e]:

$$\text{c)} \qquad \int \frac{dx}{k(a-x) - k_1 x} = -\frac{1}{k+k_1} \log \text{nat} \left[k(a-x) - k_1 x\right].$$

woraus sich das weitere ergiebt.

62. Die Gleichgewichtskonstante k umkehrbarer Reaktionen ist mit der Wärmemenge q, die bei der Reaktion entwickelt wird, durch die Gleichung verbunden:

$$\text{a)} \qquad \frac{d \log \text{nat}\, k}{dT} = -\frac{q}{2T^2}.$$

Die Wärmemenge q ist in Grammkalorien gemessen und auf die Gewichtsmenge von je 1 Grammmolekül (Mol) der reagierenden Stoffe bezogen.

Unter der Annahme, dass q zwischen den Temperaturen T_1 und T_2 konstant sei, können wir a) in diesen Grenzen integrieren und erhalten:

$$\text{b)} \qquad \left[\log \text{nat}\, k\right]_{k_1}^{k_2} = \frac{q}{2}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

oder

$$\log \text{nat} \frac{k_2}{k_1} = -q \frac{T_2 - T_1}{2 T_1 T_2}$$

Diese Gleichung e) findet vielfach praktische Anwendung, um, wenn für die Temperatur T_1 die Gleichgewichtskonstante k_1 und ferner die Wärmetönung q bekannt ist, daraus für T_2 die unbekannte Gleichgewichtskonstante k_2 zu bestimmen; umgekehrt lässt sich q berechnen, wenn man für 2 Temperaturen die zugehörigen Gleichgewichtskonstanten kennt.

63. Häufig lässt sich eine Differentialgleichung nicht geraden Wegs lösen, wie in den bisher behandelten Fällen. Aus der Fülle fesselnder Aufgaben, die sich hier bieten, will ich eine Gleichung herausgreifen, die mir in der Zeitschrift für Elektrochemie, X (1904). S. 640 begegnete:

$$a) \qquad \frac{dE}{dT} = \frac{E - Q_0}{T} + S$$

(darin ist E die „freie Energie“ eines sich umwandelnden Systems, Q_0 die bei der Umwandlung (bei der Temperatur T_0) entwickelte Wärme und S die Differenz der spezifischen Wärmen vor und nach der Umwandlung). Q_0 und S sind Konstante.

Diese Gleichung a) können wir nicht ohne weiteres integrieren, weil das Glied S stört, wohl aber die einfachere Gleichung:

$$b) \qquad \frac{dE}{dT} = \frac{E - Q_0}{T},$$

deren Auflösung lautet:

$$c) \qquad \log \text{nat} (E - Q_0) = \log \text{nat}\, T + \log \text{nat}\, K,$$

wenn wir der Gleichmässigkeit halber auch der Integrationskonstante logarithmische Form geben.

Gehen wir von den Logarithmen der Variablen zu den Variablen selbst über, so wird c) zu

$$d) \qquad E - Q_0 = K \cdot T.$$

Aus dieser Lösung der vereinfachten Gleichung b) können wir das Integral der ursprünglichen Gleichung a) ableiten, wenn wir K nicht als absolute Konstante, sondern als Variable auffassen und den erforderlichen Wert von K, mit dem der Gleichung a) genügt wird, berechnen.

Differentieren wir d) nach dieser Annahme, so wird

$$dE = KdT + TdK$$

und mit Benutzung von d)

f) $$dE = \frac{E - Q_0}{T} \cdot dT + TdK$$

oder

$$\frac{dE}{dT} = \frac{E - Q_0}{T} + T\frac{dK}{dT}.$$

Der Vergleich a) und f) ergiebt:

g) $$T\frac{dK}{dT} = S,$$

woraus folgt:

h) $$K = S \log \mathrm{nat}\, T + K_1.$$

Setzen wir diesen Wert für K in die Gleichung d) ein, so erhalten wir schliesslich als Auflösung der Differentialgleichung a):

$$E - Q_0 = T(S \,.\, \log \mathrm{nat}\, K + K_1).$$

Dieses von Lagrange stammende Verfahren, eine Differentialgleichung mit Störungsfunktion zu lösen, nennt man Variation der Konstanten.

Differentialgleichungen höherer Ordnung.

64. Hier wollen wir ebenfalls gleich ein Beispiel behandeln: Das Gesetz des freien Falles sagt aus, dass die Beschleunigung der Fallgeschwindigkeit konstant ist.

Die Geschwindigkeit einer Bewegung wird gegeben durch den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit:

a) $$v = \frac{ds}{dt}.$$

Beschleunigung ist der Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit:

b) $$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Nennen wir, wie üblich, g die Beschleunigung durch die Schwere (auf der Erdoberfläche 9,81 Meter in der Sekunde), so wird das Gesetz des freien Falles dargestellt durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

c) $$\frac{d^2 s}{dt^2} = g.$$

Integrieren wir die Gleichung c), so wird:

d) $$\frac{ds}{dt} = gt + K.$$

Integrieren wir noch einmal, dann erhalten wir:

e) $$s = \frac{gt^2}{2} + Kt + K_1.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ für $t = 0$ auch $= 0$, so ergiebt d):

f) $$K = 0.$$

Da ferner für $t = 0$ der Fallraum s auch $= 0$ ist, so wird:

g) $$K_1 = 0$$

und e) vereinfacht sich zu:

h) $$s = \frac{gt^2}{2},$$

während d) für die Fallgeschwindigkeit nach der Zeit t ergiebt:

i) $$v = \frac{ds}{dt} = gt.$$

Dieterichsche Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner) in Göttingen.